9th Sep 2020 lec delivered by Prof. Rashid Wednesday.

Vector Spaces:

Written by Khadija Mumtaz.

Let F be a field, $V \neq \phi$, then V is vector space over F ($V(F)$, V) if the following axioms hold.

(i) $(V, +)$ abelian group

(ii) $\forall\, a \in F,\ v \in V,\ av$ is in V (scalar multiplication)
$[\because F \times V \to V]$

(iii) $a(u+v) = au + av \quad \forall\, a \in F,\ u, v \in V$

elements of vector space $\longrightarrow$ vectors
elements of field $\longrightarrow$ scalars

(iv) $(a+b)v = av + bv \quad \forall\, a, b \in F,\ v \in V$

یہ distributive laws کہلاتے ہیں۔

(v) $(ab)v = a(bv) \quad \forall\, a, b \in F,\ v \in V$

(vi) $1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in V$ 1 is multiplicative identity of F

→ Example:-

$$V = Z, \quad F = Q$$

(i) $(V, +)$ is abelian group

دوسرا axiom لازمی چیک کرنا ہے زیادہ گڑبڑ کے chances
2nd axiom میں ہوتے ہیں۔

(ii) Consider $a = \frac{1}{2}$, $v = 3$

$av = \left(\frac{1}{2}\right)(3) \Rightarrow \frac{3}{2} \notin V = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ There does not exist a scalar multiplication
$\because Q \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (does not exist mapping)

- $\mathbb{Z}(Q)$ is not a vector space
- $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ is not a vector space
- $\mathbb{Z}(C)$ is not a vector space

• — $\mathbb{Z}(\mathbb{Q}\sqrt{2})$ is not a vector space

Observation:-

- $F \subseteq V \rightarrow$ possible chances of vector space
- $V \subseteq F \rightarrow$ not a vector space.

Following this observation

i- $Q(Q) \rightarrow$ vector space
  Q is a field and Q is a group under addition

ii- $Q(\mathbb{R}) \rightarrow$ not a vector space because $V \subseteq F$

iii- $\mathbb{R}(\mathbb{R}) \rightarrow$ vector space

iv- $\mathbb{R}(Q) \rightarrow$ vector space

v- $C(C) \rightarrow$ vector space

vi- $C(\mathbb{R}) \rightarrow$ vector space

vii- $C(Q) \rightarrow$ vector space

viii- $Q(\sqrt{2})(Q\sqrt{2}) \rightarrow$ vector space

ix- $\mathbb{R}(C) \rightarrow$ not a vector space because $V \subseteq F$

x- $Q(\sqrt{2})$ over Q is vector space

$\rightarrow$ If F is field, then F(F) is also a vector space.

$Q(Q)$, $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, $C(C)$, $Q(\sqrt{2})$ over $Q(\sqrt{2})$ and $Q(\sqrt{3})$ over $Q(\sqrt{3})$ are examples of above result.

$\rightarrow V = M_{n \times m}(\mathbb{R})$

$V(\mathbb{R}) \rightarrow$ is vector space

$\rightarrow V = \mathbb{R}^n(\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^n = R \times R \times R \times \dots \times \mathbb{R}$ (n times)

$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$

Scanned with CamScanner

یہاں پہ generalize کرکے $\mathbb{R}^n$ لکھا ہوا ہے اگر $n=2$ ہو تو $\mathbb{R}^2$
کوئی vector space ہو گی اسی طرح $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ اور دیگر کو generalize کر دیا۔

→ $P(x)$ – all polynomials

$P(x)$ over $F \rightarrow$ vector space ∵ any Field

$P_n(x)$ — all polynomials of degree less or equal to n.

$P_n(x)$ is vector space over $\mathbb{R}$

→ $X \neq \phi$ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$A = \{f ; f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ vector space over $\mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ for addition

$\alpha(f(x)) = \alpha f(x)$ scalar multiplication

→ Subspaces:-

Let $V(F) \rightarrow$ vector space

$V \supset W \neq \phi$ if $W(F) \rightarrow$ vector space then

W is subspace of V

→ Examples:-

- $Q(Q)$ subspace of $\mathbb{R}(Q)$, $C(Q)$, $Q(\sqrt{2})(Q)$
- $\mathbb{R}(Q)$ subspace of $C(Q)$
- $Q(\sqrt{2})(Q)$ subspace of $\mathbb{R}(Q)$

کے non empty subsets جو کہ over the same field -
vector spaces بھی ہوں تو subspaces ہی کہلائی جاتی ہیں

- $P_n(x)$ over F is subspace of $P(x)$ over F

→ Trivial Subspaces:-

$\{0\}$, V

→ Non Trivial Subspaces:-

Non-trivial subspaces are other then $\{0\}$ and V.

$Q(Q)$, $\mathbb{R}(Q)$, $Q(\sqrt{2})(Q)$ and $P_n(x)$ over F are examples of non-trivial subspaces.

→ $V = \mathbb{R}^3$

$W = \{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\}$ is non-trivial subspace of $\mathbb{R}^3$

→ **Criteria:-**

Let $V(F)$ vector space

$V \supset W \neq \phi$, W is subspace of V

iff

$$\alpha x + \beta y \in W$$

$$\alpha, \beta \in F, \quad x, y \in W$$

دو results کو mix کر کے criteria بنایا گیا ہے۔

i- Closed under addition

ii- Closed under scalar multiplication

Before applying criteria we should check identity. Example related to this is given below.

→ **Example:-**

$V = \mathbb{R}^3$

$H = \{(x, y, z),\ x - y = 1\}$

جو origin ہے وہ اس condition کو satisfy ہی نہیں کرتا

origin کا مطلب ہے کہ $\mathbb{R}^3$ کے اندر جہاں تینوں xyz coordinate

آپس میں intersect کرتے ہیں تو وہ (0,0,0) ہوتے ہیں

$0 \notin H$

⇒ H is not a subspace of $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

→ **Example:**

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(x, y, 0) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, y_1, 0), \; (x_2, y_2, 0)$$

$$\alpha(x_1, y_1, 0) + \beta(x_2, y_2, 0)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \; \alpha y_1 + \beta y_2, \; 0)$$

$$x_1, y_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2, y_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) \in \mathbb{R}, \quad (\alpha y_1 + \beta y_2) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2, \; \alpha y_1 + \beta y_2, \; 0) \in W$$

By using criteria we proved W is a subspace of $\mathbb{R}^3$.

→ **Example:**

$$V = \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$$

$$H = \{(x, y, z) : x + y = 0\}$$

For using criteria we need two elements from H.

$$(x_1, y_1, z_1), \; (x_2, y_2, z_2) \in H$$

According to condition

$$x_1 + y_1 = 0, \quad x_2 + y_2 = 0$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \; \alpha y_1 + \beta y_2, \; \alpha z_1 + \beta z_2)$$

اب اِس element کو چیک کرنا ہے کہ یہ H میں belong
کرتا ہے یا نہیں - condition کے مطابق x اور y (coordinate)
کا sum zero کے برابر ہوگا -

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2$$

$\alpha x_1 + \alpha y_1 + \beta x_2 + \beta y_2$
$= \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2)$
$= \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) \quad \because x_1 + y_1 = 0, \; x_2 + y_2 = 0$
$= \alpha(0) + \beta(0)$
$= 0 + 0 \Rightarrow 0$

By using criteria we proved that H is a subspace of $\mathbb{R}^3$

→ Union of two Subspaces:-

دو subspaces کی union سے V وہ again vectorspace کی subspace نہیں ہوگی۔ کیسے نہیں ہوگی؟ Example سے چیک کریں گے

→ Example:-

$$V = \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$$
$$U = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$W = \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$$

We take one element from U and one element from W

$$(3, 0), \quad (0, 7)$$

• (0,7) اور (3,0) دونوں elements (union) میں موجود ہیں۔ یہ دونوں elements (U اور W کی union کے elements ہیں)
اب چیک یہ کرنا ہے کہ U اور W کی union والا جو set بنا ہے کیا وہ subspace ہے یا نہیں ہے۔

→ By using criteria we just check closed property.

• $(3,0) + (0,7) = (3,7) \notin (U \cup W)$

• کیونکہ $U \cup W$ میں جو elements ہیں وہ x-axis پہ ہے اور y-axis پہ ہے اور یہ جو element آیا ہے نہ x-axis پہ ہے اور نہ ہی y-axis پہ ہے۔

→ $U \cup W \rightarrow$ Subspace of V
iff $U \subset W$ or $W \subset U$

→ Intersection of Subspaces:-

Intersection of two-subspaces is a subspace of V..

- کیونکہ اِن کے اندر atleast آپ کے پاس zero element آ جائے گا identity۔ additive وہ تو لازمی آ جائے گی۔ کیونکہ یہ subspace ہے یعنی subgroups ہیں۔ یعنی یہ groups ہیں under addition۔ جتنی بھی subspaces کی intersection لیں تو atleast zero ضرور آئے گا۔

→ Sum of Subspaces:-

$U, W \rightarrow$ subspaces of V then

$U + W = \{u + w,\ u \in U,\ w \in W\}$

$U + W$ is also a subspace of V.

→ Direct Sum:-

$V \rightarrow$ direct sum of U and W

iff

(i) $V = U + W$

(ii) $U \cap W = \{0\}$

This direct sum is denoted by $U \oplus W$

Mcq's

→ **Q:** Which of the following is not a vector space?

(a) $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ (b) $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$ (c) $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ (d) $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Explanation:

- $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$ and $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ are vector spaces
- $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ vector space نہیں ہے۔ vector space کے axioms دیکھیں تو جو پہلا axiom ہے کہ V کو under addition

$\mathbb{R}$ under addition abelian group ہونا چاہیے۔ تو abelian group ہے۔ دوسرا axiom ہوتا ہے scalar multiplication کا۔ ایسی scalar multiplication جو $\mathbb{R}$ cross C کے elements کو $\mathbb{R}$ میں لے کر جائے لیکن یہاں ایسی کوئی scalar multiplication نہیں ملتی۔

- اگر scalar multiplication وہ والی لیں جو usual multiplication complex numbers سے والی۔ تو اس سے کچھ scalar mutiplication (hold) نہیں کرے گی۔ $F \times V \rightarrow V$ میں elements نہیں آئیں گے۔

- کوئی اور کچھ scalar multiplication لے سکتے ہیں جو $F \times V \rightarrow V$ میں ہو۔ اگر ایسی scalar multiplication مل جاتی ہے تو باقی axioms میں vector space کے وہ satisfy نہیں کریں گے۔

- option (d) is correct.

Q: Which of the following is not a subspace of $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x, y, z) : x+y=0\}$ (b) $\{(x, y, z) : x-y=0\}$

(c) $\{(x, y, z) : x-y=1\}$ (d) $\{(x, y, z) : x+2y=0, 2x+3z=0\}$

Explanation:-

- سب سے پہلے additive identity کو دیکھنا ہے۔ اگر subset کے اندر additive identity موجود نہیں ہے تو پھر criteria چیک کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

- option (c) میں additive identity نہیں ہے۔ جو origin ہے $(0,0,0)$ وہ اس condition کو satisfy نہیں کرتا

option (c) is true.

- In option (a)

(x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2)

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

According to condition

Scanned with CamScanner

$x_1+y_1=0$, $x_2+y_2=0$

$\alpha(x_1, y_1, z_1)+\beta(x_2, y_2, z_2)$

$= \alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2$

$= \alpha x_1+\alpha y_1+\beta x_2+\beta y_2$

$= \alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2)$ $\because (x_1+y_1)=0 \; (x_2+y_2)=0$

$= \alpha(0)+\beta(0)$

$= 0$

$\Rightarrow$ By using subspace criteria this subset become subspace

- In option (d)

(x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2)

According to given condition

$x_1+2y_1=0$, $x_2+2y_2=0$

$2x_1+3z_1=0$, $2x_2+3z_2=0$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(x_1, y_1, z_1)+\beta(x_2, y_2, z_2)$

$= \underbrace{\alpha x_1+\beta x_2}_{x}, \underbrace{\alpha y_1+\beta y_2}_{y}, \underbrace{\alpha z_1+\beta z_2}_{z}$

Condition $x+2y=0$, $2x+3z=0$

$\alpha x_1+\beta x_2+2(\alpha y_1+\beta y_2)$, $2(\alpha x_1+\beta x_2)+3(\alpha z_1+\beta z_2)$

$= \alpha x_1+\beta x_2+2\alpha y_1+2\beta y_2$, $2\alpha x_1+2\beta x_2+3\alpha z_1+3\beta z_2$

$= \alpha(x_1+2y_1)+\beta(x_2+2y_2)$, $\alpha(2x_1+3z_1)+\beta(2x_2+3z_2)$

$= 0+0$, $0+0$

$= 0$, 0

$\Rightarrow$ So this subset is a subspace

Scanned with CamScanner

- For option (b)

(x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2)

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

According to given condition

$x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$

$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)$

$= \alpha x_1 + \beta x_2 , \alpha y_1 + \beta y_2 , \alpha z_1 + \beta z_2$

$= \alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha y_1 + \beta y_2)$

$= \alpha(x_1 - y_1) + \beta(x_2 - y_2) \Rightarrow 0$ $\quad \because (x_1 - y_1) = 0$

By using subspace criteria $\quad \because x_2 - y_2 = 0$

this subset become subspace

Q: Let $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$, then which is subspace of V.

(a) $\{A \in V, |A| = 0\}$ (b) $\{A \in V, A^2 = A\}$

(c) $\{A \in V, AT = TA$ for some $T \subset V\}$ (d) All of above

Explanation:-

For option (a)

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ اس کا determinent zero ہے

اور اگر determinent zero ہے کوئی b' $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ add کر دیں تو

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

determinent zero نہیں ہوگا - option (a) تو ہے وہ

subspace یہ - under addition ہے closed نہیں ہوگی

نہیں ہے -

For option (b)

$A^2 = A$ یعنی idempotent matrices

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ idempotent matrices

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ not idempotent

option (b) کی under addition closed نہیں ہوتی ہے

یہ کوئی subspace نہیں ہوتی ہے۔

For option (c)

A, B

$AT = TA \quad , \quad BT = TB$

Using criteria

$(\alpha A + \beta B)T = \alpha AT + \beta BT$

$= \alpha TA + \beta TB$

$= T(\alpha A + \beta B)$ option (c) is correct

Q: Which is false?

(a) A subspace is also a vector space.

(b) $1 \cdot V = V$ only for some elements of V.

(c) A vector is an element in vector space.

(d) $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ is a vector space.

Explanation:-

option (b) false ہے۔ جبکہ option (a), (c), (d) true

یہاں for some elements کیلئے نہیں all elements

کیلئے hold کرتی ہے condition.

Q: Let V_1, V_2 be subspaces of V, which is not subspace of V?

(a) $V_1 \cup V_2$ (b) $V_1 \cap V_2$ (c) $V_1 + V_2$ (d) All of these

Explanation:-

- Union of two subspaces is not a subspace of V.
- Intersection of two subspaces is a subspace of V.
- Sum of two subspaces is a subspace of V

Q: Let $V = \mathbb{R}(\mathbb{R})$ then which is a subspace of V?

(a) $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ (b) $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ (c) $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ (d) $\mathbb{R}(\mathbb{R})$

Explanation:-

- $\mathbb{Z}(\mathbb{R}) \rightarrow$ not vector space
- $\mathbb{C}(\mathbb{R}) \rightarrow$ vector space but $\mathbb{C}$ is not subset of $\mathbb{R}$ (not subspace)
- $\mathbb{Q}(\mathbb{R}) \rightarrow$ not vector space
- $\mathbb{R}(\mathbb{R}) \rightarrow$ vector space (trivial subspace)

Q: Let $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x,y,z) : x = 2y = 3z\}$
$W = \{(x,y,z) : x = 0\}$ then $U+W$ is

(a) x-y plane (b) $U \cap V$ (c) $\mathbb{R}^3$ (d) yz plane

Explanation:

$x = 2y = 3z$

$y = x/2, \; z = x/3$

$x, \; x/2, \; x/3$ — U کے elements ایسے ہونگے

$(0, \; y_1, \; z_1)$ — W کے ایسے ہونگے

$\left(x, \; \frac{x}{2} + y_1, \; \frac{x}{3} + z_1\right)$ — sum والی subspace کے elements ایسے ہونگے

$$= \begin{pmatrix} x \\ x/2 + y_1 \\ x/3 + z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 + (-1/2)R_1 \\ R_3 + (-\frac{1}{3})R_1 \end{matrix}$$

option (c) is correct

Q: $U = \{(a,b,c) ; a = b = c\}$, $W = \{(0,b,c)\}$ are subspaces of $\mathbb{R}^3$, then

(a) $\mathbb{R}^3 = U + W$ (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (c) $\mathbb{R}^3 = U \cap W$ (d) None

Explanation:-

$\mathbb{R}^3 = U \cap W = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})\}$ (Common) additive identity ہے۔

$\mathbb{R}^3 = U + W$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Q: Which of the following is not a subspace of $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(a,b,c), a = 3b\}$ (b) $\{(a,b,c)\ a \leq b \leq c\}$

(c) $\{(a,b,c), a+b+c = 0\}$ (d) $\{(a,b,c), a = 2b = 3c\}$

Explanation:-

option (b) subspace ہوگی۔ option (a), (b), (d) subspaces نہیں بنے گی اس لیے counter example ہے۔

$(-1).(2,3,4)$

$= (-2, -3, -4)$

دیا ہوا scalar multiplication closed نہیں ہے۔

Q: Which of the following is subspace of $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x,y,z) ; x+y = 1\}$ $\{(x,y,z) ; x-y = 1\}$

(c) $\{(x,y,z) ; x-y = 0\}$ All of these

Explanation:-

اگر option(a), (b) کو دیکھتے ہیں تو یہ ایسے subsets ہیں جن کے اندر origin شامل نہیں ہے۔ identity کی موجود نہیں ہے یہ دونوں subspaces نہیں ہو سکتیں۔

option (c) is correct.

Q: Which of the following is not a subspace of $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(a, b, c) ; a, b, c \text{ are rationals}\}$

(b) $\{(0, 0, 0)\}$

(c) $\{(a, a+b, -a+2b) ; a, b \text{ are reals}\}$

(d) $\{(a, a-b, b) ; a, b \text{ are reals}\}$

Explanation:-

$$\sqrt{2}\cdot(p, q, r) \qquad p, q, r \in \mathbb{Q}$$
$$= (\sqrt{2}p, \sqrt{2}q, \sqrt{2}r)$$

scalar multiplication is not closed. option (a) is not subspace.

10th Sep 2020 Lec # 2 (I) Thursday.

Linear Combination And Spanning Sets

Let $V(F) \rightarrow$ vector space

$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ and $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in F$

$u \in V$

$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \qquad 1 \leq i \leq n$

$\rightarrow$ u is written in linear combination of $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$

Lec delivered by prof. Rashid
Written by Hadiqa Mumtaz.

→ Example:

$$V = \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$$

$$u = (1, 3, 2) \in V$$

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

$$(1, 3, 2) = \underset{a_1}{\underset{\downarrow}{1}}(1, 0, 0) + \underset{a_2}{\underset{\downarrow}{3}}(0, 1, 0) + \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{2}}(0, 0, 1)$$

$\Rightarrow$ $(1, 3, 2)$ is written in linear combination of $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

or

$1(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$ is the linear combination of $(1, 3, 2)$

→ Example:

$$V = \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$$

$$u = (-5, 7, -9) \in V$$

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

$$(-5, 7, -9) = \underset{a_1}{\underset{\downarrow}{-5}}(1, 0, 0) + \underset{a_2}{\underset{\downarrow}{7}}(0, 1, 0) - \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{9}}(0, 0, 1)$$

$\Rightarrow$ $-5(1, 0, 0) + 7(0, 1, 0) - 9(0, 0, 1)$ is the linear combination of $(-5, 7, -9)$

→ Spanning Set:

$$\phi \neq S \subset V(F)$$

The set consisting of all linear combination of the elements of S.

It is denoted by $\langle S \rangle$.

→ Example:

Consider $V = \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$

$$S = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$$\langle S \rangle = ?$$

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$$\mathbb{R}^3 = \langle S \rangle$$

- $\langle S \rangle \rightarrow$ subspace of $V(F)$

→ Example:

$$H = \{(a-3b), (b-a), a, b : a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\begin{bmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

$H = \langle v_1, v_2 \rangle$

$\Rightarrow$ H is subspace of $\mathbb{R}^4$

→ Null Space :-

Consider homogenous system of linear equation

$$Ax = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Writing in matrix form

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad x \quad = \quad 0$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ for which $Ax = 0$

→ x is solution of $Ax = 0$

یہ اِس homogenous system کا solution ہوگا۔ جتنے بھی solutions ہوں گے اِس homogenous system کے وہ ایک subspace بنے گی۔

If $A_{m \times n}$ matrix

$$Nul(A) = \{ x : x \in \mathbb{R}^n , Ax = 0 \}$$

جیسے groups کے اندر Ker ϕ ہوتا ہے۔ اگر $\phi : G \to G'$ یہ homomorphism ہوتی ہے تو G کے وہ سارے elements جن کا G' کی identity میں image ہوتی ہے یعنی اسکا zero ہوتا ہے اُن elements کی collection جو ہوتی ہے وہ Ker ϕ ہوتا ہے۔ یہ null space بھی وہی چیز ہے۔ یہاں یہ جو homomorphism ہوتی ہے اس کو linear transformation کہتے ہیں۔ اگر

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$A \to m \times n$ matrix

linear transformation (back) ہوتی ہے یعنی R^n سے R^m

• اگر mapping $R^n \to R^m$ ہوتی تو R^n کے وہ
والے elements اپنے ہوں ker میں جو R^m کی identity کے
اوپر map کرتے ہوں

$Nul(A) \to$ subspace of V.

→ **Example:**

Consider $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

$$-5x_1 + 9x_2 + x_3 = 0$$

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

We have to check that u is in the $Nul(A)$ or not?

* If $Au = 0 \Rightarrow u$ is in the $Nul(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Au = \begin{bmatrix} 5-9+4 \\ -25+27-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow u \in Nul(A)$

→ **Example:**

Consider $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

$$-5x_1 + 9x_2 + x_3 = 0$$

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

* If $Av = 0 \Rightarrow v$ is in the $Nul(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Av = \begin{bmatrix} -2-9-10 \\ 10+27+5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -21 \\ 42 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow v \notin Nul(A)$

- Nul(A) non empty ضرور ہوگی جس میں at least ایک element ضرور ہوگا وہ ہوگا zero - یہ ہمیشہ subspace بنا کرے گی V کی - اور V ہے $\mathbb{R}^n$
- $Ax = 0$ والے elements جو اس کو satisfy کرتے ہیں اور اُن elements کی collection ہمیشہ subspace بنتی ہے V vector space کی - یہ صرف homogenous system کیلئے ہے
- اگر non-homogenous system ہوگا تو پھر ضروری نہیں ہے کہ وہ 0 جو Nul(A) ہوگی وہ اس کی subspace بنے - کیونکہ اگر system non-homogenous ہوگا اُس کا جو ہے وہ 0 solution نہیں ہے جو identity ہے وہی اس کو belong نہیں کر رہی تو وہ subspace نہیں بنے گی -
- Nul(A) تب بنے گی جب $Ax = 0$ لیا ہو یعنی system homogenous ہو -

→ Column Space :-

$A \rightarrow m \times n$ matrix

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ columns of A

$Col(A) = Span\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$

- A کے جتنے بھی columns ہیں اُن کے linear combinations all possible - Span کا مطلب ہے اس set کے جتنے بھی

linear combinations ساری وہ برابر ہے Col(A) کے ۔

→ Col (A) is subspace of R^m

→ Nul (A) is subspace of $\mathbb{R}^n$

$\text{Col}(A) = \{ b : b = Ax ; \text{ for some } x \text{ in } \mathbb{R} \}$

→ Example:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 6a-b \\ a+b \\ -7a \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Find col (A) ?

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 6a \\ a \\ -7a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$W = \left\{ a \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}}_{V_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_2} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$W = \text{col}(A)$

$W = \langle V_1, V_2 \rangle$

→ Comparison :-

A is m×n matrix

Column Space	Nul (A)
• Col (A) is subspace of R^m	• Nul (A) is subspace of R^n
• Col (A) is directly linked with entries of A	• Nul (A) has no link with enteries of A

- Given columns are used to form column space of (A)
- $Col(A) = \mathbb{R}^m$ for every vector b in $\mathbb{R}^m$ such that $b = Ax$ has solution

- take time to find vectors in $Nul(A)$
- $Nul(A) = \{0\}$ iff $Ax = 0$ has only trivial solution

→ Linear Transformation :-

$V, W \rightarrow$ vector spaces

$$T : V \rightarrow W$$

$$\{T(x) \rightarrow y \in W\}$$

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

$$\forall \; u, v \in V, \quad \alpha \in F$$

We can combine (i) and (ii)

- $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$

$$\forall \; x, y \in V, \quad \alpha, \beta \in F$$

- Field کے elements کو scalars بولتے ہیں اور vector space کے elements کو vectors بولتے ہیں۔

$$T : V \rightarrow W$$

$$Ker T = \{x \in V, \; T(x) = 0\}$$

- ★ $Ker T$ is subspace of V
- ★ $Im(T) = \{y \in W, \; T(x) = y$ for some x in $V\}$

- یہاں پہ $T(x)$, y ہے یعنی x کی images ہیں۔ image of T میں کون سے elements ہیں؟ W کے وہ والے elements ہیں جو V کے elements کی images ہیں۔

→ Examples :-

1:
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x, y) = (-y, x)$$
T is linear ?

For applying one step criteria we need two elements

$$x = (x_1, y_1) \quad , \quad y = (x_2, y_2)$$

Now applying criteria
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$
$$\alpha T(x) + \beta T(y) = T(\alpha x + \beta y)$$
$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_2, \beta y_2)$$
$$T(\alpha x + \beta y) = T(\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}, \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2})$$

یہ دونوں elements ہیں۔ آگئے $\mathbb{R}^2$ کے

Now according to given condition
$$T(x, y) = (-y, x)$$
$$T(\alpha x + \beta y) = (-\alpha y_1 - \beta y_2 , \alpha x_1 + \beta x_2) \to (1)$$
$$T(x) = (-y_1, x_1)$$
$$T(y) = (-y_2, x_2)$$
$$\alpha T(x) + \beta T(y) = -\alpha y_1 - \beta y_2 , \alpha x_1 + \beta x_2 \to (2)$$

From (1) & (2)
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

$\Rightarrow$ T is linear Transformation

2: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = (x_1+1,\ x_2+2)$$

- یہاں پہ one step criteria کی بجائے 2 axioms بھی استعمال کر سکتے ہیں۔
- groups کے اندر جو homomorphism ہوتی vector space کے اندر وہی linear transformation ہے۔
- groups کے اندر homomorphism ایسی ہوتی تھی؟ ایسی ہوتی تھی جن میں identity کا identity image ہوتا تھا۔
- اب اس نے linear transformation ہوتا ہے تو identity کا identity image ہونا چاہیے

If we check identity

$T(0,0) = (1,2)$

$\Rightarrow$ T is not linear

3: $V = P(x)$ over $\mathbb{R}$

$D: V \to V$ defined by $D(P(x)) = P'(x)$

Take two elements

$P_1(x)$, $P_2(x)$

By using criteria

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

$$D(\alpha x + \beta y) = D(\alpha P_1(x) + \beta P_2(x))$$

$$D(\alpha x + \beta y) = (\alpha P_1(x))' + (\beta P_2(x))'$$

$$D(\alpha x + \beta y) = \alpha P_1'(x) + \beta P_2'(x)$$

$$D(\alpha x + \beta y) = \alpha D(P_1(x)) + \beta D(P_2(x))$$

$\Rightarrow$ This mapping is linear transformation

- V سے V کے اوپر جتنی بھی linear transformation ہوتی ہیں۔ اُن کی
جو collection ہے وہ set بھی vector space ہوتا ہے۔
- یعنی linear transformation کے set کا collection
vector space ہوتا ہے
$T: V \to V$
$A = \{T ; T: V \to V \text{ linear transformation}\}$
- اس کی zero transformation identity ہوتی ہے یعنی جو بھی element
ہو اُس کا image zero آ جائے۔
- zero transformation بھی linear transformation ہوتی ہے

→ Different Notations:

$$Homo(V, V) = \{T ; T: V \to V\}$$
$$L(U; V) = \{L ; L: U \to V\}$$

- groups کے اندر automorphism میں دونوں groups same
ہوتے ہیں لیکن linear transformation میں دونوں
vector spaces کا same ہونا ضروری نہیں ہے۔

→ Linearly Independent Sets:-

An indexed set of vectors $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ is said to be linearly independent iff

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

has only trivial solution

$$\Rightarrow c_i = 0$$

→ Linearly Dependent Sets:-

If any one of c_i $1 \le i \le n$ is non-zero, then given set is linearly dependent set.

→ In $\mathbb{R}^n$

→ zero vector is linearly dependent

$$a(\bar{0}) = 0$$

→ Singleton set is linearly independent (Non-zero elements)

$$0(1) = 0$$

→ Any set of vectors containing zero vector is linearly dependent.

→ A set is linearly dependent if any one of vector is linear combination of all other vectors.

→ A set consisting of two non-zero elements is always linearly independent if both elements are not multiple of each other

$$\{\sin t, \cos t\} \text{ on } C[0,1]$$

$$k \sin t = \cos t \quad k \text{ does not exist}$$

→ Example:-

$$P_1(t) = 1, \quad P_2(t) = t, \quad P_3(t) = 4-t$$

$$S = \{P_1, P_2, P_3\} = \{1, t, 4-t\}$$

• اب یہ چیک کرنا ہے کہ set of vectors جو ہے وہ linearly
idependent ہے یا dependent ہے

• ایک تو criteria یہی ہے کہ linear combination کو zero
کے equal رکھیں وہاں سے constant کی values کو evaluate
کریں وہاں سے دیکھیں کہ سارے zero co-efficients آرہے
ہیں یا نہیں

• ایک اور criteria بھی ہے جو اس example میں استعمال ہوا ہے

$$4-t = \underbrace{4}_{a_1}(\underbrace{1}_{v_1}) - \underbrace{1}_{a_2}(\underbrace{t}_{v_2})$$

$S \rightarrow$ linearly dependent

→ Some More Results:-

→ If S is linearly independent then every subset of S is linearly independent.

→ If S is linearly dependent then every superset of S is linearly dependent.

→ Example in $\mathbb{R}^2$:-

$$(1,2),\ (4,5)$$

$$a_1(1,2) + a_2(4,5) = 0$$

$a_1 + 4a_2 = 0$	$2a_1 + 5a_2 = 0$
$a_1 = -4a_2$	$2(-4a_2) + 5a_2 = 0$
$a_1 = -4(0)$	$-8a_2 + 5a_2 = 0$
$a_1 = 0$	$-3a_2 = 0$
	$a_2 = 0$

$\Rightarrow (1,2), (4,5) \rightarrow$ linearly independent

→ Basis And Dimension:-

V is vector space

$$\phi \neq S \subset V$$

S is basis of V iff

(i) $\langle S \rangle = V$

(ii) S is linearly independent and

$\dim(V) = |S|$

$= $ No. of elements in Basis

dimension ہمیشہ کسی vector space کی natural number کی ہوتی ہے

→ **Example:-**

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$S = \{(1,0),(0,1)\}$$

$$\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$$

$a(1,0)+b(0,1)=0$

$(a,0)+(0,b)=$

$(a,b)=(0,0)$

$\Rightarrow a=0,\ b=0$

S is linearly independent

$\dim(\mathbb{R}^2)=2$

- $S=\{(1,0),(0,1)\}$ standard baisis of $\mathbb{R}^2$
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ standard basis of $\mathbb{R}^3$
- $\dim(\mathbb{R}^n)=n$

→ $P_n(x)$ over $\mathbb{R}$

$S=\{1,x,x^2,x^3,\dots,x^n\}$

جتنے بھی polynomials بن رہی ہیں اُن سب کو اِن کے linear combination
میں لکھ سکتے ہیں۔ سارے real numbers کو اِن کے ساتھ multiply
کریں گے تو یہ پوری کی پوری space بن جائے گی۔

S is basis set of $P_n(x)$

S is linearly idependent

If we want to check

$a_1(1)+a_2(x)+a_3(x^2)+a_4(x^3)+\dots+a_n x^n=0$

$\Rightarrow a_1=0=a_2=\dots=a_n$

$\Rightarrow \dim[P_n(x)]=n+1$

← اگر وہ والے polynomials آ جاتے ہیں جن کی degree 3 یا 3 سے کم ہے
تو dim 4 ہوگی۔

12th Sep 2020 Lec#02 (II) Saturday.

→ Basis And Dimension

→ $V = M_{2\times 2}$ matrices over $\mathbb{R}$

- $\dim(V) = 4$

- ان کو ضرب / multiply کر دینا ہے۔

- standard basis are $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

→ $V = M_{m\times n}$ over $\mathbb{R}$

Lec delivered by prof. Rashid
Written by Hadiqa Mumtaz.

- $\dim(V) = mn$

→ $U(F)$, $V(F)$ vector spaces

$\mathrm{Homo}(U,V) = \{T ; T: U \to V \text{ linear Transformation}\}$

$\dim[U(F)] = m$, $\dim[V(F)] = n$

- $\dim[\mathrm{Homo}(U,V)] = mn$

E.g: $\dim[\mathrm{Homo}(\mathbb{R}^4, P_3(t))] = 4.4 = 16$

→ Results:-

1. If a vector space V has basis $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ Then any set in V containing more then "n" vectors is linearly dependent.

- اگر $\mathbb{R}^2$ کی بات کریں تو (0,1) اور (1,0) کے ساتھ (1,2) والا element لے لیں تو یہ والا subset جو بنتا ہے وہ $\mathbb{R}^2$ کے اندر dependent

$\{(1,0), (0,1), (1,2)\} \to$ dependent

ہے۔

- اگر vector space V کی basis β ہے یعنی اس کی dimensions n ہیں یعنی یہ والے elements $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ تو اگر ہم کوئی V set کے اندر ان elements سے زیادہ elements موجود ہوں تو وہ set ہوگا وہ linearly dependent ہی ہوگا

$(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$

If a vector space has basis of n vectors, then any basis of V consists of exactly n vectors.

• اگر کسی vector space V کی basis میں n vectors ہیں۔ V کی اگر کوئی اور basis لے لیں گے تو اس میں بھی n vectors ہوں گے کبھی بھی اس سے زیادہ یا کم نہیں ہو سکتے۔

→ Finite Dimension Vector Space :-

S basis of V

$|S| < \infty$

Then V is finite dimension vector space

→ Finite and Infinite dimensional vector spaces :-

- $V = C(C) \rightarrow$ vector space

  $\dim(V) = 1$

  • 1 اس کی basis ہے اور 1 سے سارے elements generate کر سکتے ہیں۔ یہ finite dimension ہے۔

- $V = C(\mathbb{R})$

  basis set $= \{1, i\}$

  $\dim(V) = 2$

- $\dim(\mathbb{R}(\mathbb{R})) = 1$

  • یعنی multiplicative identity سے سارے elements کو generate کیا جا سکتا ہے۔

- $\dim(\mathbb{R}(Q)) =$ infinite

  • کیونکہ Q میں جو elements ملیں گے اُن سے irrational (elements) سارے کے سارے نہیں بن سکتے۔

- $Q(\sqrt{2})$ over Q

  $\dim(Q\sqrt{2}) = 2$

  basis set $= \{1, \sqrt{2}\}$

Scanned with CamScanner

- $V = \mathbb{R}^n$
  $\dim(V) = n.$
- $V = \mathbb{R}^2$
  $\dim(V) = 2$
- $V = \mathbb{R}^3$
  $\dim(V) = 3$
- $P_n(x)$
  $\dim(P_n(x)) = n+1$
- $P(x)$
  $\dim(P(x)) =$ infinite

- $\dim(M_{m \times n}(\mathbb{R}))$
  $= m \cdot n$
- $\dim[\mathrm{Hom}(U, V)]$
  $= \dim(U) \cdot \dim(V)$
- $V = \{f : \text{functions}\}$
  $\dim(V) =$ infinite
- $V = C(\mathbb{Q})$
  $\dim(C(\mathbb{Q})) =$ infinite
- $V = C(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$
  $\dim(C(\mathbb{Q}\sqrt{2})) =$ infinite

→ Spanning Set Theorem:-

Let $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ be a set in V, let $H = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. If one vector say (v_k) in the S is linear combination of all remaining elements of S, then set $S - \{v_k\}$ still spans H.

- S $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ تک کے vectors کا set ہے V کے اندر۔
اور H میں سارے $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ تک کے linear combination پڑے
ہوئے ہیں۔ اگر کوئی ایسا vector v_k مل جائے جو ان کے باقی تمام
elements میں ان سب کا linear combination بن جائے۔ تو وہ
والا set $S - \{v_k\}$ سے بھی وہ ہی H کو span کرے گا

If $H \neq \{0\} \Rightarrow H$ is basis of V

H non zero ہونے کا مطلب linearly independent ہے

اگر کوئی set S (vector space V) کو span کر رہا ہے اور ہمیں
نہیں معلوم کہ وہ basis ہے یا نہیں۔ اس میں سے ایک ایسا vector
مل جاتا ہے جو باقی تمام vectors کا linear combination بن جاتا ہے
وہ vector جو linear combination بن گیا ہے اس vector کو نکال دیں
گے۔ باقی جتنے بھی vectors ہونگے وہ ہمیشہ vector space V کی basis ہونگے

→ **Example:-** H is subspace of $\mathbb{R}^4$

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a-3b+6c \\ 5a+4d \\ b-2c-d \\ 5d \end{bmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + d\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}}_{v_4}$$

H ان چاروں vectors کے linear combination سے بن رہا ہے

$$v_3 = -2v_2$$

v_3 is multiple of v_2

So v_3 is independent

$$H - v_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \text{ basis of } H$$

$$\dim(H) = 3$$

or: $V \rightarrow$ vector space

$H \rightarrow$ subset of V

If H is linearly independent, the H can be extended to form basis of V.

Lec#02 (II) Saturday.

→ $\text{Rank}(A) = \dim(\text{Col}(A))$

→ $\dim(\text{col}(A)) =$ pivot columns

• اُس matrix کو echelon form میں convert کرنا ہے اُس کے بعد جتنے pivot columns ہونگے وہ dim ہو گی A column space کی۔

→ $\dim(\text{Nul}(A)) =$ No. of free variables

• یعنی کتنے ایسے variables ہیں جو free ہیں۔ یعنی کتنی rows delete ہو چکی ہیں

→ Rank Theorem:-

$A \rightarrow m \times n$ matrix

$$\text{Rank}(A) + \dim N(A) = n$$

or

$$\dim(\underset{\downarrow}{\text{Col}(A)}) + \dim(\underset{\downarrow}{\text{Nul}(A)}) = n$$

No. of pivot columns + No. of free variables $= n$

→ Invertible Matrix Theorem:-

$A \rightarrow n \times n$ matrix

i- Columns of A are basis of $\mathbb{R}^n$

ii- $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$

iii- $\dim(\text{Col}(A)) = n$

iv- $\text{Rank } A = n$

v- $\dim(\text{Null}(A)) = 0$

12th Sep2020 Lec # 3 Saturday.

→ Eigen Values and Eigen Vectors

If A is $n \times n$ matrix then a scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ is called an eigen value of A, if there exist $V \neq 0$ such that

$$AV = \lambda V$$

$\lambda \rightarrow$ eigen value of 'A'

$V \rightarrow$ eigen vector of 'A'

$$AV = \lambda I V$$

$$AV - \lambda I V = 0$$

$$V(A - \lambda I) = 0$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

Lec delivered by
Prof. Rashid Watto
Written by
Hadiqa Mumtaz.

→ characteristic polynomial of A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

solutions of $P(\lambda)$ are called eigen values of A

→ Example:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 30 \\ 30 - 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4u$$

$$AV = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 12 \\ 15 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

V is not an eigen vector of A.

→ Example :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0$$

$$2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 4) + 1(\lambda - 4) = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 4, -1$$

$\lambda = -1, 4$ eigen values of A

Eigen vector corresponding to $\lambda = -1$

$$AV = \lambda V$$

Let $V = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 = -x_1$$

$$3x_1 + x_2 = -x_2$$

$$3x_1 + x_2 + x_2 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}x_2$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eigen vector corresponding to $\lambda = 4$

$$AV = \lambda V$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 4x_1$$

$$3x_1 + x_2 = 4x_2$$

$$3x_1 = 4x_2 - x_2 \implies 3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$$V = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ Eigen Space:-

جو $(A-\lambda I)=0$ جتنے بھی اِس equation کے solutions ہونگے
وہ Null space بنائیں گی اور اُن solutions کے set کو
یہ eigen space کہتے ہیں اُس matrix کی۔

→ Orthogonal Matrix:-

Matrix A is orthogonal if $A^T = A^{-1}$

→ λ is eigen value of orthogonal matrix then $\lambda = 1$ or $\lambda = -1$

→ Eigen values of diagonal matrix are entries of principal diagonal.

→ Eigen values of A and A^T are same.

→ λ eigen value of A, $1/\lambda$ eigen value of A^{-1}

• $(A-\lambda I)V=0$ اِس کے solutions کی set یا collection
کوئی subspace بنتی ہے $\mathbb{R}^n$ کی۔ اور اِس کو eigen values کی
وہ eigen space کہتے ہیں۔

Mcq's

→ Let A be a 3×3 matrix with eigen values $1, -1, 0$. Then which can be the eigen value of A^{100}.

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) 3

Explanation:-

$$\lambda \longrightarrow A$$
$$\lambda^k \longrightarrow A^k$$

option (a) is correct

→ If $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ is an eigen vector of $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2n \end{bmatrix}$ then $n = ?$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) None

Explanation:-

$$AV = \lambda V$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+1 \\ -3-2n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -3-2n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2 \quad , \quad -3-2n = -\lambda$$
$$-2n = -2+3$$
$$-2n = 1 \Rightarrow 2n = -1$$

→ Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be linear such that $T(1,0) = (1,2)$ $T(1,1) = (0,2)$ Then $T(a,b) =$ ______

(a) $(a, 2b)$ (b) $(2a, b)$ (c) $(a-b, 2a)$ (d) $(a-b, 2b)$

Explanation:-

$T(1,1) = (a, 2b) = (1,2) \neq (0,2)$

$T(1,1) = (2a, b) = (2,1) \neq (0,2)$

Lec # 3 Saturday

$T(1,1) = (a-b, 2a) = (0,2) = (0,2)$

$T(1,0) = (a-b, 2a) = (1,2) = (1,2)$

$T(1,1) = (a-b, 2b) = (0,2)$

$T(1,0) = (a-b, 2b) = (1,0) \neq (1,2)$

option (c) is correct

→ Sum of all eigen values of A = ____

(a) Trace (A) (b) $|A|$ (c) $|adj(A)|$ (d) Sum of cofactors

Explanation :-

• Sum of all eigen values of A is called trace (A).

• product of all eigen values of matrix A is called determinent of A

→ The minimum and maximum eigen value of $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ are -2 and 6. Then other eigen value is ? (a) 5 (b) 3 (c) 1 (d) -1

Explanation :-

Sum of all eigen values of A is trace (A).

$-2 + 6 + x = 7$

$4 + x = 7 \Rightarrow x = 7 - 4$

$x = 3$ option (b) is correct